Svi zadaci iz ove lekcije (18 zadataka) su posuđeni iz knjige "Zbirka rešenih zadataka iz Verovatnoće i statistike", autora Silvia Gilezan, Ljubo Nedović, Zorana Lužanin, Zoran Ovcin, Tatjana Grbić, Jelena Ivetić, Biljana Mihailović, Ksenija Doroslovački, izdanje Novi Sad, 2009. godine

2.2 Slučajne promenljive apsolutno neprekidnog tipa

U odeljku 2.1 smo razmatrali slučajne promenljive diskretnog tipa kod kojih je skup vrednosti, $\mathcal{R}_X$, najviše prebrojiv. Skup vrednosti slučajne promenljive neprekidnog tipa, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, je neprebrojiv, tj. ona može uzimati vrednosti iz nekog intervala ili iz celog skupa realnih brojeva.

Funkcija gustine, φ_X, slučajne promenljive neprekidnog tipa je nenegativna realna funkcija sa sledećim osobinama:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)\, dx = \mathsf{P}(-\infty < X < \infty) = 1, \tag{2.9}$$

$$\mathsf{P}(X = a) = 0, \text{ za } a \in \mathbb{R}, \tag{2.10}$$

za sve $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ važi da je

$$\mathsf{P}(a < X < b) = \int_a^b \varphi_X(x)\, dx. \tag{2.11}$$

Važi i sledeće

$$\mathsf{P}(a \leq X \leq b) = \mathsf{P}(a < X \leq b) = \mathsf{P}(a \leq X < b) = \int_a^b \varphi_X(x)\, dx. \tag{2.12}$$

Funkcija raspodele F_X neprekidne slučajne promenljive X je za svako $x \in \mathbb{R}$ data sa

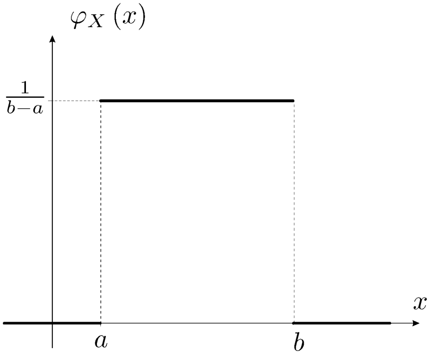
$$F_X(x) = \mathsf{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\, dt, \tag{2.13}$$

i u tačkama neprekidnosti važi

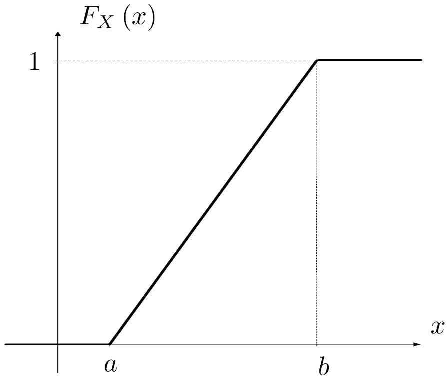
$$\varphi_X(x) = F'_X(x). \tag{2.14}$$

Slučajna promenljiva sa **uniformnom** $\mathcal{U}(a,b)$ raspodelom, gde su $a,\ b \in \mathbb{R}$ i $a < b$, ima gustinu i odgovarajuću funkciju raspodele

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b), \\ 0, & x \notin (a,b); \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{2.15}$$



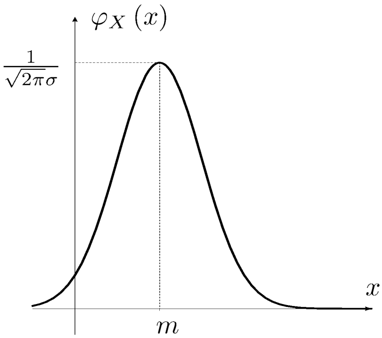
Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{U}(a,b)$.



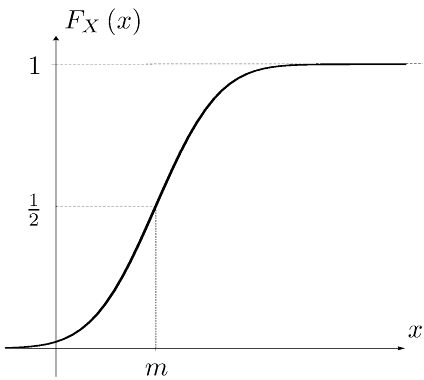
Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{U}(a,b)$.

Slučajna promenljiva sa **normalnom** (Gausovom) $\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodelom, gde su $m, \sigma \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, ima gustinu i odgovarajuću funkciju raspodele

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R}; \qquad F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$



Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{N}(m,\sigma)$.



Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{N}(m,\sigma)$.

Napomena: **Standardizovana** (**normalizovana**) slučajna promenljiva X^* se dobija iz slučajne promenljive X transformacijom:[2]

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}; \tag{2.16}$$

ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu sa parametrima m i σ tada slučajna promenljiva $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ ima normalnu $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu, tj. ako

[2] transformacije slučajnih promenljivih, matematičko očekivanje $E(X)$ i disperzija $D(X)$ definisani su u poglavlju V

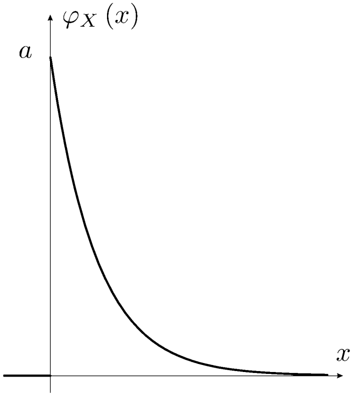
$$X : \mathcal{N}(m,\sigma) \quad \text{tada} \quad X^* = \frac{X-m}{\sigma} : \mathcal{N}(0,1); \tag{2.17}$$

na osnovu Moavr-Laplasove teoreme možemo zaključiti da raspodela standardizovane binomne slučajne promenljive X^* može biti aproksimirana normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0,1)$, tj. ako

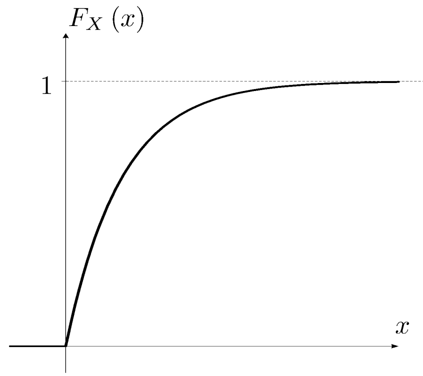
$$X : \mathcal{B}(n,p) \quad \text{tada} \quad X^* = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} : \mathcal{N}(0,1). \tag{2.18}$$

Slučajna promenljiva sa **eksponencijalnom** $\mathcal{E}(a)$ raspodelom, gde je $a > 0$, ima gustinu i odgovarajuću funkciju raspodele

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0; \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases} \tag{2.19}$$



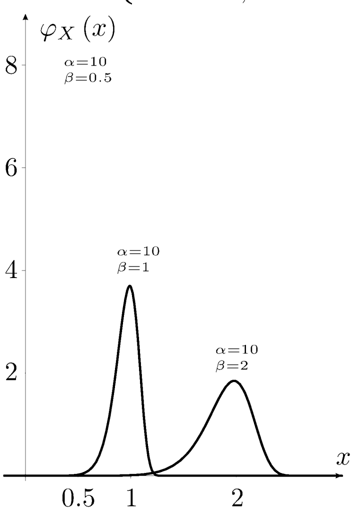
Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{E}(a)$.



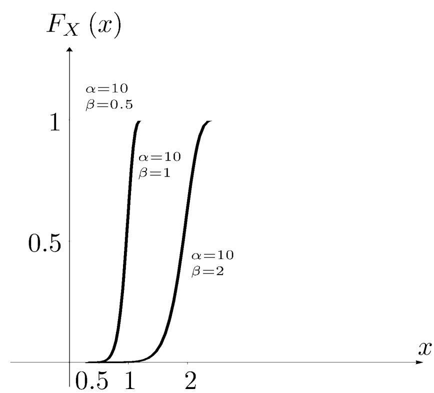
Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{E}(a)$.

Slučajna promenljiva sa **Vejbulovom** $\mathcal{V}(\alpha,\beta)$ raspodelom, sa parametrima $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ima gustinu i odgovarajuću funkciju raspodele

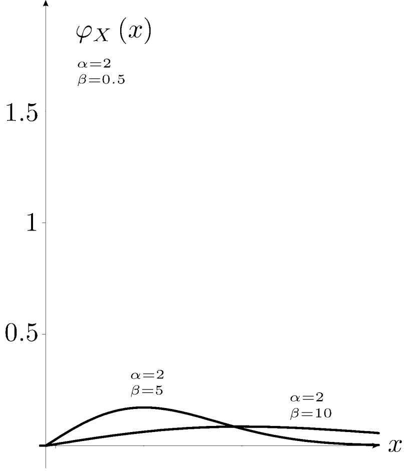
$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0; \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases} \tag{2.20}$$



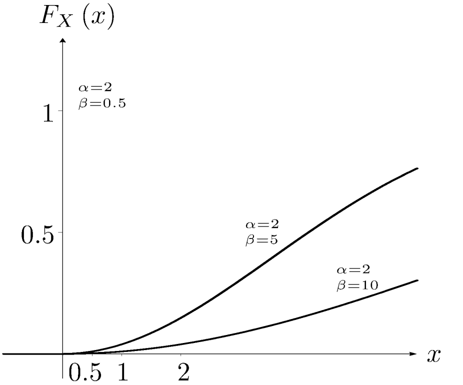
Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{V}(\alpha,\beta)$.



Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{V}(\alpha,\beta)$.



Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{V}(\alpha,\beta)$.



Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{V}(\alpha,\beta)$.

---

[99] *Knjiga u čitaonici se iznajmljuje najduže na dva sata. Neka slučajna promenljiva X označava vreme zadržavanja knjige kod slučajno izabranog studenta. Gustina slučajne promenljive X data je sa*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$$

(a) *Izračunati $F_X(1.2)$, $F_X(-1)$, $F_X(3.5)$, a zatim naći funkciju raspodele $F_X(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}$.*

(b) *Kolika je verovatnoća da će knjiga biti izdata između sat i sat i po vremena?*

(c) *Izračunati verovatnoće* $\mathsf{P}(X \le 1)$, $\mathsf{P}(X > 1.5)$ *i* $\mathsf{P}(X = 1)$.

(d) *Grafički predstaviti funkciju gustine φ_X i funkciju raspodele F_X.*

Rešenje:

(a) Direktnom primenom formule (2.13), dobija se

$$F_X(1.2) = \int_{-\infty}^{1.2} \varphi_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_0^{1.2} \frac{1}{2}\, x\, dx = 0 + \frac{1}{4}\, x^2 \Big|_0^{1.2} = 0.36.$$

Analogno sledi $F_X(-1) = \int_{-\infty}^{-1} \varphi_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-1} 0\, dx = 0,$

kao i $F_X(3.5) = \int_{-\infty}^{3.5} \varphi_X(x)\, dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x\, dx = 1.$

Za pronalaženje funkcije raspodele, razmotrićemo sledeća tri slučaja:

i) Za $x \le 0$, važi da je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0.$$

ii) Za fiksirano x iz intervala $(0,2]$, tj. ako je $0 < x \le 2$, dobija se

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}\,t\,dt = 0 + \left.\frac{1}{4}\,t^2\right|_0^x = \frac{1}{4}x^2$$

iii) Ako je $x > 2$, dobijamo

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{2} \frac{1}{2}\,t\,dt + \int_{2}^{x} 0\,dt = 0 + \left.\frac{1}{4}\,t^2\right|_0^2 + 0 = 1.$$

Konačno, iz i), ii) i iii) dobija se

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

(b) Verovatnoća događaja da će knjiga biti izdata između sat i sat i po vremena je verovatnoća da slučajna promenjiva X uzima vrednosti između 1 i 1.5. Na osnovu (2.12) dobija se

$$\mathsf{P}(1 \le X \le 1.5) = \int_{1}^{1.5} \frac{1}{2}\,x\,dx = \left.\frac{1}{4}\,x^2\right|_1^{1.5} = \frac{(1.5)^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 0.3125.$$

Primetimo da isti rezultat možemo dobiti i pomoću funkcije raspodele F_X određene pod (a), tj.

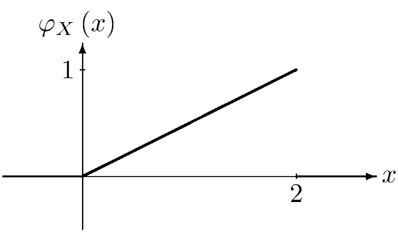
$$\mathsf{P}(1 \le X \le 1.5) = F_X(1.5) - F_X(1) = \frac{(1.5)^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 0.3125.$$

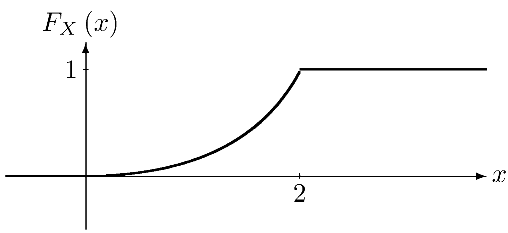
(c) Na osnovu (2.12), dobija se

$$\mathsf{P}(X \le 1) = \int_{-\infty}^{1} \varphi_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}\,x\,dx = 0 + \left.\frac{1}{4}\,x^2\right|_0^1 = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Traženu verovatnoću možemo izračunati i ovako: $\mathsf{P}(X \le 1) = \mathsf{P}(X < 1) = F_X(1) = \frac{1}{4}$.
Slično, $\mathsf{P}(X > 1.5) = \int_{1.5}^{2} \frac{1}{2}\,x\,dx = \left.\frac{1}{4}\,x^2\right|_{1.5}^{2} = 1 - 0.5625 = 0.4375$ ili pomoću funkcije raspodele $\mathsf{P}(X > 1.5) = 1 - \mathsf{P}(X \le 1.5) = 1 - F_X(1.5) = 1 - \frac{1.5^2}{4} = 0.4375$.
Na osnovu osobine gustine (2.10), koja je zadovoljena za svaki realan broj a, dobija se da je $\mathsf{P}(X = 1) = 0$.

(d) Grafici gustine φ_X i funkcije raspodele F_X su:





[100] *Profesor nikada ne završi čas pre zvona, ali završi u toku prve minute nakon zvona. Neka X predstavlja vreme (izraženo u minutima) koje prođe od zvona do završetka predavanja. Gustina za X data je sa*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} kx^2, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

(a) *Odrediti konstantu k.*

(b) *Naći funkciju raspodele za X.*

(c) *Kolika je verovatnoća da će čas biti produžen najduže pola minute?*

(d) *Kolika je verovatnoća da će čas biti produžen više od 40 sekundi?*

Rešenje:

(a) Konstantu k određujemo tako da bude zadovoljena osobina (2.9). Prema tome,

$$\int_0^1 kx^2\,dx = k\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{k}{3} = 1,$$

a odavde sledi da je tražena konstanta $k = 3$.

(b) Za fiksirano x, $x \leq 0$ funkcija raspodele je $F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0\,dx = 0$. Neka je $x \in (0,1]$. Tada je $F_X(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_X(t)\,dt = \int_0^x 3t^2\,dt = t^3\big|_0^x = x^3$. Ako je $x > 1$ dobija se $F_X(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_X(t)\,dt = \int_0^1 3t^2\,dt = 1$. Dakle, funkcija raspodele F_X slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

(c) Verovatnoća događaja da će čas biti produžen najduže pola minute je verovatnoća da slučajna promenljiva X uzme vrednost manju ili jednaku 0.5. Dakle,

$$\mathsf{P}(X \leq 0.5) = \int_{-\infty}^{0.5} \varphi_X(x)\,dx = \int_0^{0.5} 3x^2\,dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^{0.5} = 0.125.$$

Do istog rezultata dolazimo i ako iskoristimo rešenje pod (b), odnosno

$$\mathsf{P}(X \leq 0.5) = \mathsf{P}(X < 0.5) = F_X(0.5) = 0.5^3 = 0.125.$$

(d) Događaj da je čas produžen više od 40 sekundi podrazumeva da slučajna promenljiva X uzme vrednost strogo veću od $\frac{2}{3}$. Njegova verovatnoća je

$$\mathsf{P}(X > 2/3) = \int_{2/3}^1 3x^2\,dx = x^3\big|_{2/3}^1 = 1 - (2/3)^3 = 0.7037.$$

Primetimo da pomoću funkcije raspodele dolazimo do istog rezultata $\mathsf{P}(X > 2/3) = 1 - \mathsf{P}(X \le 2/3) = 1 - F_X(2/3) = 1 - (2/3)^3 = 0.7037$.

---

[101] *Slučajna promenljiva X data je gustinom*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} k(1-(x-3)^2), & 2 \le x \le 4, \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

(a) *Odrediti konstantu k i skicirati grafik funkcije φ_X.*

(b) *Izračunati* $\mathsf{P}(2.5 < X < 3)$ *i* $\mathsf{P}(X > 3)$.

(c) *Odrediti funkciju raspodele F_X i skicirati njen grafik.*

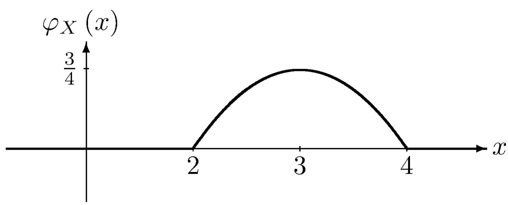
Rešenje:

(a) Konstanta k se određuje iz uslova (2.9). Kako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)\,dx = \int_2^4 k(1-(x-3)^2)\,dx = k\int_2^4 (-8+6x-x^2)\,dx =$$

$$= k\left(-8x + 3x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^4 = \frac{4}{3}k,$$

iz uslova dobijamo da je tražena konstanta $k = \frac{3}{4}$. Grafik funkcije gustine φ_X je



(b) Slično kao u prethodnom zadatku možemo dobiti tražene verovatnoće

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(2.5 < X < 3) &= \int_{2.5}^{3} \frac{3}{4}(1-(x-3)^2)\,dx = \left\{ \begin{array}{rr} \text{smena} & x-3=t, \\ & dx = dt \end{array} \right\} \\ &= \int_{-0.5}^{0} \frac{3}{4}(1-t^2)\,dt = \left(\frac{3}{4}t - \frac{1}{4}t^3\right)\Bigg|_{-0.5}^{0} = 0.34375. \end{aligned}$$

Dalje, $\mathsf{P}(X > 3) = \int_3^4 \frac{3}{4}(1-(x-3)^2)\,dx$. Integral sa desne strane jednakosti može se rešiti uvođenjem smene $x - 3 = t$ i njegovim izračunavanjem dobijamo da je tražena verovatnoća 0.5.

(c) Za $x \le 2$ je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$,

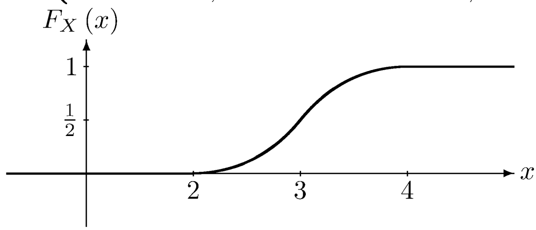
a za $x > 4$ je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{2} 0\,dt + \int_2^4 \frac{3}{4}(1-(t-3)^2)\,dt + \int_4^x 0\,dt = 1.$

Posmatrajmo $x \in (2, 4]$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\, dt = \int_{-\infty}^{2} 0\, dt + \frac{3}{4}\int_{2}^{x}(-8+6t-t^2)\, dt = \\ &= \frac{3}{4}(-8t+3t^2-\frac{1}{3}t^3)\Big|_2^x = \frac{3}{4}(\frac{20}{3}-8x+3x^2-\frac{x^3}{3}) \end{aligned}$$

Dakle, funkcija raspodele i njen grafik su

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ -\frac{x^3}{4}+\frac{9}{4}x^2-6x+5, & 2 < x \le 4, \\ 1, & x > 4, \end{cases}$$



---

[102] *Na putu za posao, profesor prvo mora da „hvata” autobus blizu kuće koji ga odvozi do stajališta za drugi autobus koji ga vozi do posla. Slučajna promenljiva X predstavlja vreme čekanja oba autobusa (izraženo u minutama) i data je gustinom*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x, & 0 \le x < 5, \\ \frac{2}{5}-\frac{1}{25}x, & 5 \le x \le 10, \\ 0, & x \notin [0,10]. \end{cases}$$

(a) *Kolika je verovatnoća da će na čekanje „izgubiti” više od 6 minuta?*

(b) *Kolika je verovatnoća da će na čekanje „izgubiti” između 3 i 8 minuta?*

(c) *Naći funkciju raspodele F_X.*

(d) *Grafički predstaviti funkcije φ_X i F_X, a zatim obeležiti $\mathsf{P}(X < 6)$.*

Rešenje:

(a) Verovatnoća događaja da će na čekanje „izgubiti” više od 6 minuta je

$$\mathsf{P}(X > 6) = \int_6^{10}(\frac{2}{5}-\frac{1}{25}x)\, dx = (\frac{2}{5}x-\frac{1}{50}x^2)\Big|_6^{10} = 0.32.$$

(b) Uočimo da je gustina različito definisana na intervalima $[0,5)$ i $[5,10]$, a zatim slično kao pod (a), dobijamo da je tražena verovatnoća

$$\mathsf{P}(3 \le X \le 8) = \int_3^8 \varphi_X(x)\, dx = \int_3^5 \frac{1}{25}x\, dx + \int_5^8(\frac{2}{5}-\frac{1}{25}x)\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{50}\Big|_3^5 + (\frac{2x}{5}-\frac{x^2}{50})\Big|_5^8 = 0.74$$

(c) Za $x \leq 0$ je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.

Ako je $x > 10$ tada je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{5} \frac{1}{25} t\,dt + \int_{5}^{10} (\frac{2}{5} - \frac{1}{25}t)\,dt + \int_{10}^{x} 0\,dt = 1$.

Za $x \in (0,5]$ je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{25} t\,dt = \frac{x^2}{50}$.

Ako je $x \in (5,10]$ tada je

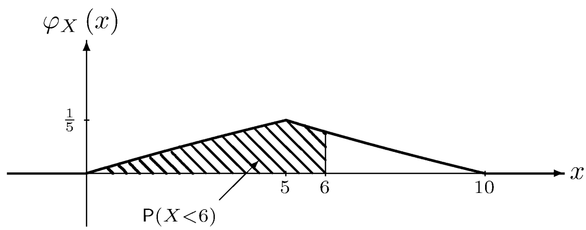
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{5} \frac{1}{25} t\,dt + \int_{5}^{x} (\frac{2}{5} - \frac{1}{25}t)\,dt =$$

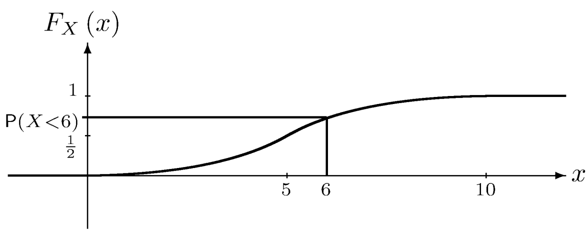
$$= \frac{t^2}{50}\Big|_0^5 + (\frac{2t}{5} - \frac{t^2}{50})\Big|_5^x = -1 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{50}x^2.$$

Dakle, funkcija raspodele je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{50}, & 0 < x \leq 5, \\ -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1, & 5 < x \leq 10, \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

(d) Grafici gustine φ_X i funkcije raspodele F_X su:





---

[103] *Neprekidna slučajna promenljiva data je funkcijom raspodele*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{4}(1 + \ln\frac{4}{x}), & 0 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

(a) *Naći funkciju gustine za* X.

(b) *Izračunati* $\mathsf{P}(X \leq 1)$ *i* $\mathsf{P}(1 < X \leq 3)$.

Rešenje:

(a) Kako je poznata funkcija raspodele F_X, gustinu ćemo naći pomoću relacije (2.14), koja važi u svim tačkama u kojima je gustina neprekidna. Za $x \in (0,4]$ je

$$\varphi_X(x) = \left(\frac{x}{4}(1+\ln\frac{4}{x})\right)' = \frac{1}{4}(1+\ln\frac{4}{x}) + \frac{x}{4}\cdot\frac{x}{4}\cdot(-\frac{4}{x^2}) = \frac{1}{4}(1+\ln\frac{4}{x}) - \frac{1}{4}$$

Dakle,

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\ln\frac{4}{x}, & x \in (0,4] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(b) Po definiciji funkcije raspodele je $\mathsf{P}(X \leq 1) = F_X(1) = \dfrac{1}{4}(1+\ln 4)$. Slično je $\mathsf{P}(1 < X \leq 3) = F_X(3) - F_X(1) = \dfrac{3}{4}\left(1+\ln\dfrac{4}{3}\right) - \dfrac{1}{4}(1+\ln 4) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{16}{27} \approx 0.37.$

---

[104] *Neprekidna slučajna promenljiva X data je funkcijom raspodele:*

$$F_X(x) = \begin{cases} b, & x \leq 1, \\ \frac{(x-1)^3}{27}, & 1 < x \leq 4, \\ 3a, & x > 4. \end{cases}$$

Odrediti konstante a i b i naći gustinu za X.

Rešenje: Konstante a i b određujemo na osnovu osobina $\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ funkcije raspodele, te dobijamo da je $3a = 1$, dakle $a = \frac{1}{3}$ i $b = 0$.
Koristeći (2.14) dobijamo za $x \in (1,4]$

$$\varphi_X(x) = \left(\frac{(x-1)^3}{27}\right)' = \frac{3(x-1)^2}{27} = \frac{(x-1)^2}{9},$$

te je

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{9}, & x \in (1,4], \\ 0, & x \notin (1,4]. \end{cases}$$

---

[105] *Neka je X vreme (izraženo u satima) između dolaska dva klijenta u banku i neka X ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom $a = 0.2$.*

(a) *Skicirati grafike funkcije gustine i funkcije raspodele slučajne promenljive X. Na grafiku funkcije gustine predstaviti $\mathsf{P}(X \geq 0.2)$.*

(b) *Kolika je verovatnoća da će između dolaska dva klijenta proteći najviše 30 minuta?*

(c) *Izračunati $\mathsf{P}(0.4 \leq X \leq 1)$ i $\mathsf{P}(X \geq 0.2)$.*

Rešenje:

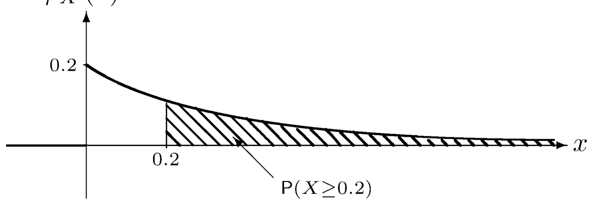
(a) Kako slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom $a = 0.2$, tj. $X : \mathcal{E}(0.2)$, njena funkcija raspodele je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-0.2x}, & x > 0 \end{cases} .$$

Gustina slučajne promenljive X je

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0.2e^{-0.2x}, & x > 0, \end{cases}$$

a grafici funkcija φ_X i F_X su



(b) Verovatnoća traženog događaja je

$\mathsf{P}(X \leq 0.5) = F_X(0.5) = 1 - e^{-0.2\cdot 0.5} = 1 - e^{-0.1} = 1 - 0.9048 = 0.0952.$

(c) Na osnovu (2.13) i (2.12) dobijamo da je

$\mathsf{P}(0.4 \leq X \leq 1) = F_X(1) - F_X(0.4) = 1 - e^{-0.2\cdot 1} - (1 - e^{-0.2\cdot 0.4}) =$
$= e^{-0.08} - e^{-0.2} = 0.9231 - 0.8187 = 0.1044,$

$\mathsf{P}(X \geq 0.2) = 1 - \mathsf{P}(X < 0.2) = 1 - F_X(0.2) = 1 - (1 - e^{-0.2\cdot 0.2}) =$
$= e^{-0.04} = 0.9608.$

---

[106] *Slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu raspodelu, $X : \mathcal{E}(1)$.*

(a) *Odrediti funkciju raspodele i gustinu slučajne promenljive X.*

(b) *Izračunati $F_X(-2)$, $F_X(4)$, $\mathsf{P}(|X| \leq 3)$ i $\mathsf{P}(0.2 \leq 2X - 1 < 7)$.*

Rešenje:

(a) Funkcija gustine φ_X i funkcija raspodele F_X su

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ e^{-x}, & x > 0, \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$$

(b) $F_X(-2) = 0$, $F_X(4) = 1 - e^{-4} \approx 0.9817$, a tražene verovatnoće su
$\mathsf{P}(|X| \le 3) = \mathsf{P}(-3 \le X \le 3) = F_X(3) - F_X(-3) = 1 - e^{-3} - 0 \approx 0.95$,
$\mathsf{P}(0.2 \le 2X - 1 < 7) = \mathsf{P}(1.2 \le 2X < 8) = \mathsf{P}(0.6 \le X < 4) = F_X(4) - F_X(0.6) =$
$$= 1 - e^{-4} - (1 - e^{-0.6}) \approx 0.9817 - 0.4512 = 0.5305.$$

---

[107] *Slučajna promenljva Y koja predstavlja kašnjenje voza (izraženo u satima) ima uniformnu raspodelu, $Y : \mathcal{U}(0, 2)$.*

(a) *Skicirati grafike funkcije gustine i funkcije raspodele slučajne promenljive Y. Na grafiku funkcije gustine predstaviti $\mathsf{P}(0.2 \le Y \le 1.8)$.*

(b) *Kolika je verovatnoća da će voz kasniti bar 45 minuta?*

(c) *Izračunati $\mathsf{P}(Y \le 0.5)$, $\mathsf{P}(0.2 \le Y \le 1.8)$ i $\mathsf{P}(Y \ge 1.7)$.*

Rešenje:

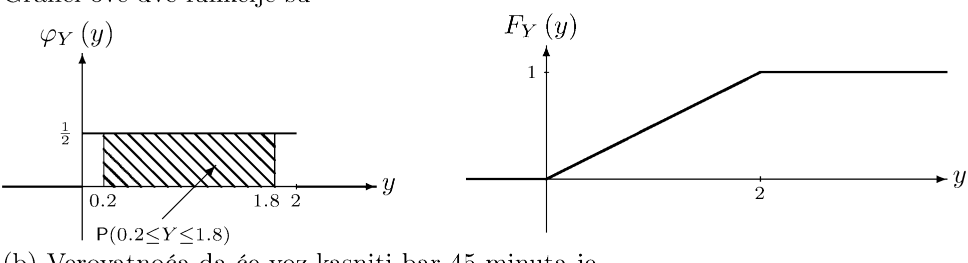
(a) Funkcija raspodele slučajne promenljive Y je

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ \frac{y}{2}, & 0 < y \le 2, \\ 1, & y > 2, \end{cases}$$

a njena gustina je

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin (0, 2) \\ \frac{1}{2}, & y \in (0, 2) \end{cases} .$$

Grafici ove dve funkcije su



(b) Verovatnoća da će voz kasniti bar 45 minuta je
$\mathsf{P}(Y \ge \frac{3}{4}) = 1 - \mathsf{P}(Y < \frac{3}{4}) = 1 - F_Y\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{3}{8} = 0.625.$

(c) Tražene verovatnoće su $\mathsf{P}(Y \le 0.5) = F_Y(0.5) = \frac{0.5}{2} = 0.25.$
$\mathsf{P}(0.2 \le Y \le 1.8) = F_Y(1.8) - F_Y(0.2) = \frac{1.8}{2} - \frac{0.2}{2} = 0.8,$
dok je $\mathsf{P}(Y \ge 1.7) = 1 - \mathsf{P}(Y < 1.7) = 1 - F_Y(1.7) = 1 - \frac{1.7}{2} = 0.15.$

---

[108] *Slučajna promenljiva X ima uniformnu raspodelu, $X : \mathcal{U}(-3; 5)$.*

(a) *Odrediti funkciju raspodele i gustinu slučajne promenljive X.*

(b) *Izračunati $F_X(0)$, $\mathsf{P}(|X - 3| \le 5)$ i $\mathsf{P}(1 < 2 - X < 10)$.*

Rešenje:

(a) Funkcija gustine φ_X i funkcija raspodele F_X su

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-3;5), \\ \frac{1}{8}, & x \in (-3;5), \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, \\ \frac{x+3}{8}, & -3 < x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

(b) $F_X(0) = \frac{0+3}{8} = \frac{3}{8} = 0.375$, a tražene verovatnoće su

$\mathsf{P}(|X-3| \leq 5) = \mathsf{P}(-5 \leq X-3 \leq 5) = \mathsf{P}(-2 \leq X \leq 8) = F_X(8) - F_X(-2) =$
$= 1 - \frac{-2+3}{8} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0.875,$

$\mathsf{P}(1 < 2-X < 10) = \mathsf{P}(-1 < -X < 8) = \mathsf{P}(-8 < X < 1) = F_X(1) - F_X(-8) =$
$= \frac{1+3}{8} - 0 = \frac{1}{2} = 0.5.$

---

[109] *Slučajna promenljiva X predstavlja dužinu rada motora izraženu u hiljadama sati. Neka X ima Vejbulovu raspodelu sa parametrima $\alpha = 2$ i $\beta = 2$.*

(a) *Kolika je verovatnoća da će motor raditi bar 6 hiljada sati?*

(b) *Kolika je verovatnoća da će motor raditi između 2 i 3 hiljade sati?*

Rešenje:

(a) Funkcija gustine φ_X i funkcija raspodele F_X su

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2} x e^{-(\frac{x}{2})^2}, & x > 0, \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-(\frac{x}{2})^2}, & x > 0, \end{cases}$$

Tražena verovatnoća je

$\mathsf{P}(X > 6) = 1 - \mathsf{P}(X \leq 6) = 1 - F_X(6) = 1 - (1 - e^{-9}) = 0.999877.$

(b) Verovatnoća događaja da će motor raditi između 2 i 3 hiljade sati je

$\mathsf{P}(2 \leq X \leq 3) = F_X(3) - F_X(2) = 1 - e^{-\frac{9}{4}} - (1 - e^{-1}) = 0.2624802.$

---

[110] *Neka slučajna promenljiva Z ima standardizovanu normalnu raspodelu. Izračunati sledeće verovatnoće:*

(a) $\mathsf{P}(Z \leq 2.17)$ (b) $\mathsf{P}(0 \leq Z \leq 1)$ (c) $\mathsf{P}(-2.5 \leq Z)$

(d) $\mathsf{P}(1.3 \leq Z \leq 2.17)$ (e) $\mathsf{P}(-0.4 \leq Z \leq 1)$ (f) $\mathsf{P}(-2 \leq Z < 1.1)$

(g) $\mathsf{P}(|Z| \leq 1.2)$ (h) $\mathsf{P}(Z \leq 4.4)$ (j) $\mathsf{P}(Z \leq -1.01)$

Rešenje:

Prilikom rešavanja ovog i narednih zadataka korišćene su statističke tablice normalne raspodele $\mathcal{N}(0,1)$ (vidi [8]). Takođe se koriste i sledeće osobine funkcije raspodele $\Phi(x)$ slučajne promenljive sa normalnom $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom:

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ kao i $\Phi(|Z| < x) = 2\Phi(x) - 1$.

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$

x	$\ldots$	0.07	$\ldots$
$\vdots$		$\downarrow$	
2.1	$\rightarrow$	0.985	
$\vdots$			

Dakle, $\Phi(2.17) = 0.985$.

(a) $\mathsf{P}(Z \leq 2.17) = \Phi(2.17) = 0.985.$

(b) $\mathsf{P}(0 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0.8413 - 0.5 = 0.3413.$

(c) $\mathsf{P}(-2.5 \leq Z) = 1 - \mathsf{P}(Z < -2.5) = 1 - \Phi(-2.5) = 1 - (1 - \Phi(2.5)) =$
$= \Phi(2.5) = 0.9938.$

(d) $\mathsf{P}(1.3 \leq Z \leq 2.17) = \Phi(2.17) - \Phi(1.3) = 0.985 - 0.9032 = 0.0818.$

(e) $\mathsf{P}(-0.4 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-0.4) = \Phi(1) - (1 - \Phi(0.4)) = \Phi(1) + \Phi(0.4) - 1 =$
$= 0.8413 + 0.6554 - 1 = 0.4967.$

(f) $\mathsf{P}(-2 \leq Z < 1.1) = \Phi(1.1) - \Phi(-2) = \Phi(1.1) - (1 - \Phi(2)) = \Phi(1.1) + \Phi(2) - 1 =$
$= 0.8643 + 0.9772 - 1 = 0.8415$

(g) $\mathsf{P}(|Z| \leq 1.2) = \mathsf{P}(-1.2 \leq Z \leq 1.2) = \Phi(1.2) - \Phi(-1.2) = \Phi(1.2) - (1 - \Phi(1.2)) =$
$= 2\Phi(1.2) - 1 = 2 \cdot 0.8849 - 1 = 0.7698.$

(h) $\mathsf{P}(Z \leq 4.4) = \Phi(4.4) \approx 1$

(j) $\mathsf{P}(Z \leq -1.01) = \Phi(-1.01) = 1 - \Phi(1.01) = 1 - 0.8438 = 0.1562.$

---

[111] *Slučajna promenljiva Z ima standardizovanu normalnu raspodelu. Odrediti c tako da važe jednakosti:*

(a) $\Phi(c) = 0.9838$ (b) $\mathsf{P}(Z \leq c) = 0.6718$ (c) $\mathsf{P}(c \leq Z) = 0.121$

(d) $\mathsf{P}(Z \leq c) = 0.1231$ (e) $\mathsf{P}(-c \leq Z \leq c) = 0.668$ (f) $\mathsf{P}(|Z| \leq c) = 0.6542$

Rešenje:

(a) $\Phi(c) = 0.9838 \;\Rightarrow\; c = \Phi^{-1}(0.9838) = 2.14$

(b) $\mathsf{P}(Z \leq c) = 0.6718 \;\Rightarrow$
$c = \Phi^{-1}(0.6718) = 0.445$

(c) $\mathsf{P}(c \leq Z) = 0.121 \;\Rightarrow$
$1 - \mathsf{P}(Z < c) = 0.121 \;\Rightarrow$
$1 - \Phi(c) = 0.121 \;\Rightarrow\; \Phi(c) = 0.879 \;\Rightarrow$
$c = \Phi^{-1}(0.879) = 1.17.$

x	$\ldots$	0.04	0.05	$\ldots$
$\vdots$		$\uparrow$	$\uparrow$	
0.4	$\leftarrow$	0.6700	0.6736	
$\vdots$				

Dakle, $c = \Phi^{-1}(0.6718) = 0.445$, kao aritmetička sredina brojeva 0.44 i 0.45.

(d) Kako vrednost funkcije raspodele 0.1231 ne pronalazimo u tablicama ni za jedno c, koristićemo činjenicu da je $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, dakle : $\mathsf{P}(Z \leq c) = 0.1231$

$\Rightarrow\; \Phi(c) = 0.1231 \;\Rightarrow\; 1 - \Phi(-c) = 0.1231 \;\Rightarrow\; \Phi(-c) = 0.8769$

$\Rightarrow\; -c = \Phi^{-1}(0.8769) = 1.16 \;\Rightarrow\; c = -1.16.$

(e) $\mathsf{P}(-c \leq Z \leq c) = 0.668 \;\Rightarrow\; 2\Phi(c) - 1 = 0.668 \;\Rightarrow\; \Phi(c) = \frac{1.668}{2}$

$\Rightarrow\; c = \Phi^{-1}(0.834) = 0.97.$

(f) $\mathsf{P}(|Z| \leq c) = 0.6542 \;\Rightarrow\; 2\Phi(c) - 1 = 0.6542 \;\Rightarrow\; \Phi(c) = \frac{1.6542}{2}$

$\Rightarrow\; c = \Phi^{-1}(0.8271) = 0.945.$

---

[112] *Slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(80, 10)$. Izračunati verovatnoće* $\mathsf{P}(X \leq 100)$, $\mathsf{P}(70 \leq X)$, $\mathsf{P}(65 \leq X \leq 100)$ *i* $\mathsf{P}(|X - 80| \leq 10)$.

Rešenje:

$X : \mathcal{N}(80, 10) \;\Rightarrow\; X^* = \frac{X-80}{10} : \mathcal{N}(0, 1).$

$\mathsf{P}(X \le 100) = \mathsf{P}(\frac{X-80}{10} \le \frac{100-80}{10}) = \mathsf{P}(X^* \le 2) = \Phi(2) = 0.9773.$

$\mathsf{P}(70 \le X) = \mathsf{P}(\frac{70-80}{10} \le \frac{X-80}{10}) = \mathsf{P}(-1 \le X^*) = 1 - \mathsf{P}(X^* < -1) =$
$= 1 - \Phi(-1) = 1 - (1 - \Phi(1)) = 0.8413.$

$\mathsf{P}(65 \le X \le 100) = \mathsf{P}(\frac{65-80}{10} \le \frac{X-80}{10} \le \frac{100-80}{10}) = \mathsf{P}(-1.5 \le X^* \le 2) =$
$= \Phi(2) - \Phi(-1.5) = 0.9773 + 0.9332 - 1 = 0.9105.$

$\mathsf{P}(|X-80| \le 10) = \mathsf{P}(-10 \le X - 80 \le 10) = \mathsf{P}(-\frac{10}{10} \le \frac{X-80}{10} \le \frac{10}{10}) =$
$= \mathsf{P}(-1 \le X^* \le 1) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826$

---

[113] *Pretpostavimo da pH vrednost zemljišta jednog regiona ima normalnu raspodelu sa $m = 6$ i $\sigma = 0.1$. Ako je sa tog područja uzet jedan uzorak zemljišta, naći verovatnoću da uzeti uzorak ima pH vrednost*

(a) *između 5.9 i 6.15,*

(b) *veću od 6,*

(c) *najviše 5.95.*

Rešenje:

Obeležimo sa X slučajnu promenljivu koja predstavlja pH vrednost zemljišta. Kako X ima normalnu raspodelu $X : \mathcal{N}(6, 0.1)$ to $X^* = \frac{X-6}{0.1} : \mathcal{N}(0,1)$.

(a) $\mathsf{P}(5.9 \le X \le 6.15) = \mathsf{P}(\frac{5.9-6}{0.1} \le \frac{X-6}{0.1} \le \frac{6.15-6}{0.1}) = \mathsf{P}(-1 \le X^* \le 1.5) =$
$= \Phi(1.5) - \Phi(-1) = \Phi(1.5) - (1 - \Phi(1)) =$
$= 0.9332 + 0.8413 - 1 = 0.7745.$

(b) $\mathsf{P}(X > 6) = 1 - \mathsf{P}(X \le 6) = 1 - \mathsf{P}(\frac{X-6}{0.1} \le \frac{6-6}{0.1}) = 1 - \mathsf{P}(X^* \le 0) =$
$= 1 - \Phi(0) = 1 - 0.5 = 0.5.$

(c) $\mathsf{P}(X \le 5.95) = \mathsf{P}(X^* \le \frac{5.95-6}{0.1}) = \mathsf{P}(X^* \le -0.5) = \Phi(-0.5) =$
$= 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085.$

---

[114] *Neka X ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(25, 0.6)$. Izračunati verovatnoće* $\mathsf{P}(X \le 15)$, $\mathsf{P}(20 \le X)$ *i* $\mathsf{P}(10 \le X \le 22)$ *koristeći aproksimaciju binomne raspodele normalnom raspodelom.*

Rešenje:

$X : \mathcal{B}(25, 0.6) \quad n \cdot p = 25 \cdot 0.6 = 15, \ \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{25 \cdot 0.6 \cdot 0.4} = \sqrt{6},$

$\to \ X^* = \frac{X-15}{\sqrt{6}} : \mathcal{N}(0,1).$

$\mathsf{P}(X \le 15) = \mathsf{P}(\frac{X-15}{\sqrt{6}} \le \frac{15-15}{\sqrt{6}}) = \mathsf{P}(X^* \le 0) = \Phi(0) = 0.5.$

$\mathsf{P}(20 \le X) = 1 - \mathsf{P}(X < 20) = 1 - \mathsf{P}(X^* < \frac{20-15}{\sqrt{6}}) = 1 - \mathsf{P}(X^* < 2.04124) =$
$= 1 - \Phi(2.04) = 1 - 0.9793 = 0.0207.$

$\mathsf{P}(10 \le X \le 22) = \mathsf{P}(\frac{10-15}{\sqrt{6}} \le X^* \le \frac{22-15}{\sqrt{6}}) = \mathsf{P}(-2.04124 \le X^* \le 2.8577) =$
$= \Phi(2.86) - \Phi(-2.04) = 0.9979 + 0.9793 - 1 = 0.9772.$

[115] *Dinar se baca 400 puta. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj palih pisama. Koristeći aproksimaciju normalnom raspodelom izračunati verovatnoće*

(a) *da će broj palih pisama biti veći od broja palih grbova,*

(b) *da će broj palih pisama biti najviše 185.*

Rešenje: Slučajna promenljiva X ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(400, \frac{1}{2})$, $n \cdot p = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200$, $\sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$, , tako da $X^* = \frac{X-200}{10} : \mathcal{N}(0,1)$.

(a) $\mathsf{P}(X > 200) = 1 - \mathsf{P}(X \le 200) = 1 - \mathsf{P}(X^* < \frac{200-200}{10}) = 1 - \mathsf{P}(X^* < 0) =$
$= 1 - \Phi(0) = 0.5,$

(b) $\mathsf{P}(X \le 185) = \mathsf{P}(X^* \le \frac{185-200}{10}) = \mathsf{P}(X^* \le -1.5) = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) =$
$= 0.0668.$

---

[116] *Prosečno 4 % proizvoda je škart. Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj ispravnih proizvoda od 150 posmatranih. Koristeći Moavr-Laplasovu teoremu izračunati verovatnoću*

(a) *da će više od 140 proizvoda biti ispravno,*

(b) *da će više od 5 proizvoda biti neispravno.*

Rešenje: Slučajna promenljiva X koja predstavlja broj ispravnih proizvoda ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(150, 0.96)$, $p = 0.96$, $q = 0.04$, $n = 150$, pa je $np = 144$, $\sqrt{npq} = \sqrt{5.76} = 2.4$. Na osnovu Moavr-Laplasove teoreme $X^* = \frac{X-144}{2.4}$ ima standardizovanu normalnu raspodelu, tj. $\mathcal{N}(0,1)$.

(a) $\mathsf{P}(X > 140) = 1 - \mathsf{P}(X \le 140) = 1 - \mathsf{P}(\frac{X-144}{2.4} \le \frac{140-144}{2.4}) \approx 1 - \mathsf{P}(X^* \le -1.67) =$
$= 1 - \Phi(-1.67) = \Phi(1.67) = 0.9525.$

(b) Primetimo da ako je X broj ispravnih proizvoda tada je $150 - X$ broj neispravnih proizvoda i obrnuto. Zaključujemo da je događaj $A -$ „ više od 5 proizvoda je neispravno" jednak događaju $B -$ „ manje od 145 proizvoda je ispravno", tj. $A = B$. Dakle,
$\mathsf{P}(150 - X > 5) = \mathsf{P}(X < 145) = \mathsf{P}(X^* < \frac{145-144}{2.4}) \approx \mathsf{P}(X^* < 2.08) = \Phi(2.08) =$ 09812.

---

[117] *Prosečno sedamdeset posto studenata traži konsultacije za vreme rada u računskom centru. Neka je u toku dana 100 studenata radilo u računskom centru.*

(a) *Kolika je verovatnoća da će više od polovine broja studenata tražiti konsultacije?*

(b) *Kolika je verovatnoća da će broj studenata sa pitanjima biti manji od 72?*

(c) *Kolika je verovatnoća da će broj studenata sa pitanjima biti između 70 i 80?*